МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической логики и высшей алгебры

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Решение задач

Нижний Новгород, 2000

УДК: 512.1

Линейные преобразования. Решение задач: Методическая разработка по курсу “Геометрия и алгебра” для студентов специальностей “Прикладная математика”, “Информационные системы” / Составители: С. И. Веселов, Н. Ю. Золотых, Т. Г. Смирнова. – Н. Новгород: Нижегородский государственный университет, 2000. – 32 с.

Методическая разработка предназначена для студентов 1-го курса факультета ВМК специальностей “Прикладная математика”, “Информационные системы” и содержит теоретическое введение, примеры решения задач и контрольные задания по теме “Линейные преобразования”.

Составители:

С. И. Веселов, к.ф.-м.н., доц. каф. МЛиВА,
Н. Ю. Золотых, к.ф.-м.н., ст. преп. каф. МЛиВА,
Т. Г. Смирнова, к.ф.-м.н., ст. преп. каф. МЛиВА.

Рецензент:

А. В. Баркалов, к.ф.-м.н., доц. каф. МО.

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

2000

1. Теоретическое введение

Рассмотрим конечномерное[1] линейное пространство V, заданное над полем F. Отображение $\varphi : V \to V$ называется *линейным преобразованием* пространства V (или *линейным оператором*, действующим в пространстве V), если для произвольных $x, y \in V$ и произвольного $\alpha \in F$ имеют место следующие равенства:

1) $\varphi(x + y) = \varphi x + \varphi y$,

2) $\varphi(\alpha x) = \alpha(\varphi x)$.

Образом (или *множеством значений*) преобразования φ называется множество

$$\operatorname{Im} \varphi = \varphi V = \{\varphi x : x \in V\}.$$

Ядром преобразования φ называется множество

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{x \in V : \varphi x = o\}.$$

Образ и ядро линейного пребразования являются подпространствами в V. Их размерности называются соответственно рангом и дефектом преобразования и обозначаются соответственно $\operatorname{rank} \varphi$ и $\operatorname{def} \varphi$. Справедливо равенство

[1] Приведенные далее определения: линейного преобразования, нулевого и тождественного преобразований, преобразований проектирования и отражения, обратного преобразования, образа и ядра, произведения преобразования на число, произведения и суммы преобразований, собственного вектора, инвариантного и собственного подпространств — распространяются и на случай бесконечномерных пространств.

$\operatorname{rank}\varphi + \operatorname{def}\varphi = \dim V$. Преобразование φ называется *вырожденным*, если $\operatorname{def}\varphi > 0$. Преобразование φ называется *невырожденным*, если $\operatorname{def}\varphi = 0$.

Произведением преобразования $\varphi : V \to V$ *на число* $\alpha \in F$ называется отображение $\alpha\varphi$, определяемое равенством $(\alpha\varphi)x = \alpha(\varphi x)$ для произвольного $x \in V$. *Суммой* преобразований $\varphi, \psi : V \to V$ называется отображение $\varphi + \psi$, определяемое равенством $(\varphi + \psi)x = \varphi x + \psi x$ для произвольного $x \in V$. *Произведением* (или *композицией*) преобразований $\varphi, \psi : V \to V$ называется отображение $\varphi\psi$, определяемое равенством $(\varphi\psi)x = \varphi(\psi x)$ для произвольного $x \in V$. Преобразование называется *обратным* к преобразованию φ и обозначается φ^{-1}, если $\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \varepsilon$. Для преобразования φ обратное существует и единственно тогда и только тогда, когда φ невырождено.

Пусть $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис пространства V. *Матрицей преобразования* φ в базисе $\mathbf{e}$ называется матрица $[\varphi]_{\mathbf{e}} \in F^{n \times n}$, составленная из координатных столбцов[2] $[\varphi e_j]_{\mathbf{e}}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Для произвольного $x \in V$ имеем

$$[\varphi x]_{\mathbf{e}} = [\varphi]_{\mathbf{e}}[x]_{\mathbf{e}}.$$

Линейное преобразование однозначно восстанавливается по образам базисных векторов. Если $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ — два базиса пространства V, а $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$ — матрица перехода[3] от $\mathbf{e}$ к $\mathbf{e}'$,

[2]Координатный столбец вектора $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ мы обозначаем $[x]_e = (x_1, \ldots, x_n)^\top$.

[3]Матрица $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}} = (\alpha_{ij})_{n \times n}$, где $e'_j = \alpha_{1j} e_1 + \ldots + \alpha_{nj} e_n$ $(j = 1, \ldots, n)$, называется матрицей перехода от базиса $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$

то

$$[\varphi]_{\mathbf{e}'} = [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^{-1}[\varphi]_{\mathbf{e}}[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}.$$

Матрицы A, B называются *подобными*, если $B = Q^{-1}AQ$ для некоторой невырожденной матрицы Q. При этом матрица Q называется *трансформирующей*.

Образ преобразования φ является линейной оболочкой векторов, координатные столбцы которых в базисе $\mathbf{e}$ суть столбцы матрицы $[\varphi]_{\mathbf{e}}$. Ранг преобразования совпадает с рангом матрицы этого преобразования (каков бы ни был базис). Ядро преобразования определяется из системы уравнений $[\varphi]_{\mathbf{e}}[x]_{\mathbf{e}} = 0$.

Для произвольных линейных преобразований φ, ψ пространства V и произвольного числа $\alpha \in F$ справедливы равенства

$$[\alpha\varphi]_{\mathbf{e}} = \alpha[\varphi]_{\mathbf{e}}, \quad [\varphi+\psi]_{\mathbf{e}} = [\varphi]_{\mathbf{e}} + [\psi]_{\mathbf{e}}, \quad [\varphi\psi]_{\mathbf{e}} = [\varphi]_{\mathbf{e}}[\psi]_{\mathbf{e}}.$$

Для невырожденного преобразования φ справедливо равенство $[\varphi^{-1}]_{\mathbf{e}} = [\varphi]_{\mathbf{e}}^{-1}$.

Подпространство W линейного пространства V называется *инвариантным* относительно преобразования φ, если $\varphi W \subseteq W$, т.е. $\varphi x \in W$ для любого x из W. *Сужением* (или *ограничением*) преобразования φ на инвариантное подпространство W называется преобразование $\psi : W \to W$, такое, что $\psi x = \varphi x$ для любого $x \in W$. Говорят также, что на инвариантном подпространстве W преобразование φ *индуцирует* преобразование ψ.

к базису $\mathbf{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$.

Ненулевой вектор $x \in V$ называется *собственным вектором* преобразования φ, если $\varphi x = \lambda x$ для некоторого $\lambda \in F$. Число λ при этом называется *собственным значением (числом)* преобразования φ. Говорят также, что собственный вектор x *относится* к собственному значению λ (или *принадлежит* собственному значению λ). Множество всех собственных векторов, относящихся к одному собственному значению λ, дополненное нулевым вектором, является подпространством и называется *собственным подпространством.*

Вектор x является собственным вектором преобразования φ тогда и только тогда, когда его координатный столбец $[x]_{\mathbf{e}}$ является нетривиальным решением системы линейных уравнений[4]

$$([\varphi]_{\mathbf{e}} - \lambda E)\,[x]_{\mathbf{e}} = 0.$$

Для существования такого x необходимо и достаточно, чтобы

$$\det([\varphi]_{\mathbf{e}} - \lambda E) = 0.$$

Это уравнение, рассматриваемое относительно неизвестного λ, называется *характеристическим уравнением преобразования* φ. Оно не изменяется при замене базиса. Левая часть характеристического уравнения есть многочлен от λ степени $n = \dim V$. Этот многочлен называется *характеристическим многочленом преобразования* φ.

[4] Через E обозначена единичная матрица.

Алгебраической кратностью собственного значения λ называется кратность числа λ как корня характеристического многочлена. *Геометрической кратностью* собственного значения λ называется размерность собственного подпространства, относящегося к собственному значению λ. Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности. Собственные векторы, относящиеся к разным собственным значениям, линейно независимы.

Все недиагональные элементы j-го столбца матрицы $[\varphi]_{\mathbf{e}}$ равны нулю тогда и только тогда, когда j-ый вектор базиса — собственный. При этом на диагонали в j-ом столбце матрицы $[\varphi]_{\mathbf{e}}$ находится собственное число. Матрица $[\varphi]_{\mathbf{e}}$ диагональна тогда и только тогда, когда все векторы базиса $\mathbf{e}$ собственные. При этом на диагонали находятся соответствующие собственные числа. Преобразование называется *диагонализируемым*, если существует базис, в котором матрица преобразования диагональна.

Минор матрицы $A \in F^{n\times n}$ называется *диагональным* (или *главным*), если в нем с каждой строкой участвует столбец матрицы A с таким же номером. Сумма диагональных элементов (сумма главных миноров первого порядка) матрицы A называется ее *следом* и обозначается $\operatorname{tr} A$. Многочлен

$$\det(A - \lambda E) = (-\lambda)^n + s_1(-\lambda)^{n-1} + \ldots + s_{n-1}(-\lambda) + s_n$$

называется *характеристическим многочленом матрицы* $A \in F^{n\times n}$. Коэффициент s_k этого многочлена равен сумме диагональных миноров порядка k. В частности, $s_1 = \operatorname{tr} A$, $s_n = \det A$. Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.

Нулевое преобразование θ определяется равенством $\theta x = o$ для всех $x \in V$. *Тождественное преобразование* ε определяется равенством $\varepsilon x = x$ для всех $x \in V$.

Пусть пространство V раскладывается в прямую сумму подпространств: $V = V_1 \dot{+} V_2$, тогда для произвольного $x \in V$ определяются единственным образом векторы $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$, такие, что $x = x_1 + x_2$. Преобразование φ, определяемое формулой $\varphi x = x_1$, называется *проектированием* пространства V на подпространство V_1 параллельно V_2. Преобразование φ, определяемое формулой $\varphi x = x_1 - x_2$, называется *отражением* пространства V в подпространстве V_1 параллельно V_2 (или *симметрией* относительно V_1 параллельно V_2). Если пространство V — унитарное (евклидово), а подпространство V_2 является ортогональным дополнением к V_1, то проектирование и отражение на (в) V_1 параллельно V_2 называются соответственно *ортогональным проектированием* и *ортогональным отражением*.

2. Примеры решения задач

Пример 1. Линейное преобразование трехмерного арифметического пространства переводит линейно независимые векторы $a_1 = (1, 1, 1)^\top$, $a_2 = (1, 2, 0)^\top$, $a_3 = (1, 0, -1)^\top$

соответственно в векторы $b_1 = (3, 5, 0)^\top$, $b_2 = (3, 6, -1)^\top$, $b_3 = (-3, -8, 1)^\top$. Найти матрицу этого преобразования:

а) в стандартном базисе $e_1 = (1, 0, 0)^\top$, $e_2 = (0, 1, 0)^\top$, $e_3 = (0, 0, 1)^\top$;

б) в базисе a_1, a_2, a_3.

Решение. Искомое преобразование существует и единственно, так как векторы a_1, a_2, a_3 — линейно независимые и, следовательно, составляют базис трехмерного арифметического пространства.

а) Имеют место соотношения $b_i = [\varphi]_{\mathbf{e}} a_i$ $(i = 1, 2, 3)$, которые могут быть записаны в виде матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 5 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = [\varphi]_{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Это уравнение будем решать при помощи элементарных преобразований над столбцами расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline 3 & 3 & -3 \\ 5 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ \hline 3 & 0 & -6 \\ 5 & 1 & -13 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ \hline 3 & 0 & -6 \\ 4 & 1 & -12 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Таким образом, матрица линейного преобразования имеет вид

$$[\varphi]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Приведем два способа решения.

Способ 1. Матрицу линейного преобразования в базисе $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ищем по формуле $[\varphi]_{\mathbf{a}} = [\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}^{-1}[\varphi]_{\mathbf{e}}[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}$, где

$$[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{a}$. Найдем обратную матрицу[5]:

[5]Обращение матрицы $[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}$ и нахождение произведения $[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}^{-1}[\varphi]_{\mathbf{e}}$ можно выполнить одновременно, решив одно матричное уравнение $[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}X = [\varphi]_{\mathbf{e}}$.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & {}^2/_3 & -{}^1/_3 & {}^2/_3 \\ 0 & 1 & 0 & -{}^1/_3 & {}^2/_3 & -{}^1/_3 \\ 0 & 0 & 1 & {}^2/_3 & -{}^1/_3 & -{}^1/_3 \end{array}\right).$$

Окончательно получаем

$$[\varphi]_{\mathbf{a}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & 10 & -14 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Способ 2. Столбцы матрицы $[\varphi]_{\mathbf{a}}$ представляют собой столбцы координат векторов b_1, b_2, b_3 в базисе $\mathbf{a}$. Для нахождения этих координат решим матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}[\varphi]_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 5 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 6 & -8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 7 & -9 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & {}^1/_3 & -{}^2/_3 & {}^4/_3 \\ 0 & 1 & 0 & {}^7/_3 & {}^{10}/_3 & -{}^{14}/_3 \\ 0 & 0 & 1 & {}^1/_3 & {}^1/_3 & {}^1/_3 \end{array}\right).$$

Окончательно получаем

$$[\varphi]_{\mathbf{a}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & 10 & -14 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Преобразование трехмерного пространства геометрических векторов заключается в проектировании на прямую $x = 2t$, $y = t$, $z = -t$ параллельно плоскости $x - 3y - 6z = 0$. Вычислить матрицу этого преобразования в базисе, в котором записаны уравнения прямой и плоскости.

Решение. Рассмотрим два способа решения задачи.

Способ 1. Это решение непосредственно опирается на определение преобразования проектирования. Обозначим через $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ базис пространства, в котором записаны уравнения прямой и плоскости. Имеем $V = L(a_1) \dot{+} L(a_2, a_3)$, $[a_1]_{\mathbf{e}} = (2, 1, -1)^\top$, $[a_2]_{\mathbf{e}} = (3, 1, 0)^\top$, $[a_3]_{\mathbf{e}} = (0, 2, -1)^\top$, где a_1 — направляющий вектор прямой, a_2, a_3 — направляющие векторы рассматриваемой плоскости.

Разложим каждый из базисных векторов e_1, e_2, e_3 по системе a_1, a_2, a_3. Для этого следует решить три системы линейных неоднородных уравнений, левая часть которых есть матрица, составленная из столбцов $[a_1]_{\mathbf{e}}$, $[a_2]_{\mathbf{e}}$, $[a_3]_{\mathbf{e}}$, а правая представляет собой координатный столбец соответствующего базисного вектора. Все три системы решим как одно матричное уравнение:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 3/5 & 1/5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -3/5 & -6/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 2/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 3/5 & 1/5 \end{array}\right).$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{5}a_1 + \frac{1}{5}a_2 - \frac{1}{5}a_3, \quad & \varphi e_1 &= \frac{1}{5}a_1, \\ e_2 &= -\frac{3}{5}a_1 + \frac{2}{5}a_2 - \frac{3}{5}a_3, \quad & \varphi e_1 &= -\frac{3}{5}a_1, \\ e_3 &= -\frac{6}{5}a_1 + \frac{4}{5}a_2 - \frac{1}{5}a_3, \quad & \varphi e_1 &= -\frac{6}{5}a_1. \end{aligned}$$

Тогда

$$[\varphi e_1]_{\mathbf{e}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, [\varphi e_2]_{\mathbf{e}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, [\varphi e_3]_{\mathbf{e}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

и матрица преобразования имеет вид

$$[\varphi]_{\mathbf{e}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -6 & -12 \\ 1 & -3 & -6 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Способ 2. Выберем в пространстве базис, состоящий из направляющего вектора прямой a_1 и двух направляющих векторов плоскости a_2 и a_3. В базисе $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ матрица преобразования проектирования имеет вид

$$[\varphi]_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В базисе $\mathbf{e}$ матрицу $[\varphi]_{\mathbf{e}}$ преобразования ищем по формуле $[\varphi]_{\mathbf{e}} = [\mathbf{e}]_{\mathbf{a}}^{-1}[\varphi]_{\mathbf{a}}[\mathbf{e}]_{\mathbf{a}}$, где $[\mathbf{e}]_{\mathbf{a}}$ — матрица перехода от базиса $\mathbf{a}$ к базису $\mathbf{e}$, а $[\mathbf{e}]_{\mathbf{a}}^{-1} = [\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}$ — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{a}$. Легко видеть, что

$$[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу и получаем

$$[\mathbf{e}]_{\mathbf{a}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем матрицу преобразования проектирования в базисе $\mathbf{e}$:

$$[\varphi]_{\mathbf{e}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -6 & -12 \\ 1 & -3 & -6 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что преобразование проектирования диагонализируемо. Базис из собственных векторов составляют, например, векторы a_1, a_2, a_3.

Пример 3. Линейное преобразование задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, диагонализируемо ли оно: а) в вещественном пространстве, б) в комплексном пространстве. Если да, то вычислить матрицу B преобразования в базисе из собственных векторов и матрицу Q перехода к этому базису.

Решение. Для нахождения коэффициентов характеристического многочлена найдем суммы главных миноров матрицы A:

$$s_1 = 5 - 1 - 2 = 2,$$
$$s_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1,$$
$$s_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2.$$

Характеристический многочлен имеет вид $\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2$. Среди делителей ± 1, ± 2 свободного коэффициента находим один из корней $\lambda_1 = 2$. Для нахождения остальных корней исходный многочлен, умноженный на

(-1), поделим на $\lambda - 2$. Воспользуемся схемой Горнера:

	1	-2	1	-2
2	1	$2 \cdot 1 - 2 = 0$	$2 \cdot 0 + 1 = 1$	$2 \cdot 1 - 2 = 0$

В частном получаем многочлен $\lambda^2 + 1$, корни которого равны $\lambda_{2,3} = \pm i$.

а) В вещественном случае преобразование обладает лишь одним собственным значением $\lambda_1 = 2$ с алгебраической кратностью 1. Геометрическая кратность не превосходит алгебраической, следовательно, в нашем случае тоже равна 1. Максимальная линейно независимая система из собственных векторов состоит из одного вектора, следовательно, базиса из собственных векторов нет, преобразование не диагонализируемо.

б) В комплексном случае имеем три собственных значения. Для каждого из них решим систему $(A - \lambda_i E)x = 0$, где $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$.

Для $\lambda_1 = 2$ система имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ -6x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение: $x = t \cdot (4, 6, -3)^\top$, $t \in \mathbf{C}$.

Для $\lambda_2 = i$ система имеет вид

$$\begin{cases} (5 - i)x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - (1 + i)x_2 + 2x_3 = 0, \\ -6x_1 + 2x_2 - (2 + i)x_3 = 0. \end{cases}$$

Для решения этой системы можно воспользоваться методом Гаусса, а можно, обратив внимание на то, что определитель системы равен нулю, воспользоваться "правилом смешанного произведения". Первые две строки не пропорциональны, поэтому частное решение найдем через миноры, составленные из элементов этих двух строк:

$$x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1-i & 2 \end{vmatrix} = 2i, \quad x_2 = -\begin{vmatrix} 5-i & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 2+2i,$$
$$x_3 = \begin{vmatrix} 5-i & -1 \\ 6 & -1-i \end{vmatrix} = -4i.$$

Общее решение: $x = \tau \cdot (2i, 2+2i, -4i)^\top = t \cdot (1, 1-i, -2)^\top$, $\tau, t \in \mathbf{C}$.

Легко видеть, что для собственного числа $\lambda_3 = -i$, комплексно сопряженного с λ_2, общее решение системы, описывающей собственное подпространство, получается из предыдущего заменой всех чисел на сопряженные: $x = t \cdot (1, 1+i, -2)^\top$, $t \in \mathbf{C}$.

Итак, в комплексном пространстве преобразование диагонализируемо. Записывая в матрицу B по диагонали собственные числа, а в матрицу Q по столбцам — координаты собственных векторов, получаем

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 1-i & 1+i \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Выяснить, диагонализируемо ли преобразование комплексного линейного пространства, заданное матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим характеристический многочлен: $-\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda+1)^2(\lambda-1)$. Один корень, $\lambda_1 = 1$, — простой, другой, $\lambda_{2,3} = -1$, имеет алгебраическую кратность 2.

Для собственного числа $\lambda_1 = 1$ система, описывающая собственное подпространство, имеет вид

$$\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 \qquad\quad - 2x_3 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение: $x = t \cdot (1, -1, 1)^\top$, $t \in \mathbf{C}$.

Для собственного числа $\lambda_{2,3} = -1$ система, описывающая собственное подпространство, имеет вид

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение: $x = t \cdot (1, 0, -1)^\top$, $t \in \mathbf{C}$.

Максимальная линейно независимая система из собственных векторов содержит только два вектора, поэтому преобразование не диагонализируемо.

Пример 5. Выяснить, диагонализируемо ли преобразование вещественного линейного пространства, заданное матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если да, то вычислить матрицу B преобразования в базисе из собственных векторов и матрицу Q перехода к этому базису.

Решение. Находим характеристический многочлен: $-\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1 = -(\lambda+1)^2(\lambda-1)$. Один корень, $\lambda_1 = 1$, — простой, другой, $\lambda_{2,3} = -1$, имеет алгебраическую кратность 2.

Для $\lambda_1 = 1$ система, описывающая собственное подпространство, имеет вид

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 \phantom{{}- 2x_2} - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 \phantom{{}+ 2x_3} = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение: $x = t\cdot(1,-1,1)^\top$, $t \in \mathbf{R}$. Геометрическая кратность собственного числа $\lambda_1 = 1$ равна 1.

Для $\lambda_{2,3} = -1$ система, описывающая собственное подпространство, имеет вид

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение: $x = t_1\cdot(1,0,1)^\top + t_2\cdot(0,1,1)^\top$, $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$. Геометрическая кратность собственного числа $\lambda_{2,3} = -1$ равна 2.

Максимальная линейно независимая система из собственных векторов содержит три вектора, поэтому преобразование диагонализируемо.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Контрольные задания

В примерах 1.1–1.30 линейное преобразование трехмерного арифметического пространства переводит вектор a_i в вектор b_i $(i = 1, 2, 3)$.

а) Показать, что такое преобразование существует и единственно.

б) Найти матрицу преобразования в базисе a_1, a_2, a_3.

в) Найти матрицу преобразования в стандартном базисе $e_1 = (1, 0, 0)^\top$, $e_2 = (0, 1, 0)^\top$, $e_3 = (0, 0, 1)^\top$.

г) Найти ядро и образ данного преобразования.

д) Диагонализируемо ли преобразование? Если да, то указать диагональный вид преобразования и найти базис, в котором матрица преобразования диагональна.

1.1. $a_1 = (1, 1, -1)^\top$, $a_2 = (-1, 1, 0)^\top$, $a_3 = (0, -1, 1)^\top$, $b_1 = (-5, -9, 3)^\top$, $b_2 = (9, 15, -4)^\top$, $b_3 = (0, 1, -1)^\top$;

1.2. $a_1 = (1, 1, 1)^\top$, $a_2 = (0, 1, 0)^\top$, $a_3 = (1, 0, 2)^\top$, $b_1 = (3, 7, -3)^\top$, $b_2 = (4, 7, -2)^\top$, $b_3 = (3, 8, -4)^\top$;

1.3. $a_1 = (1, 0, 2)^\top$, $a_2 = (-1, -2, 2)^\top$, $a_3 = (1, 0, 0)^\top$, $b_1 = (3, 8, -4)^\top$, $b_2 = (5, 10, -4)^\top$, $b_3 = (-5, -8, 2)^\top$;

1.4. $a_1 = (1, -1, 1)^\top$, $a_2 = (1, 2, 0)^\top$, $a_3 = (1, 1, 1)^\top$, $b_1 = (-5, -7, 1)^\top$, $b_2 = (3, 6, -2)^\top$, $b_3 = (3, 7, -3)^\top$;

1.5. $a_1 = (1, 1, -1)^\top$, $a_2 = (0, -1, 0)^\top$, $a_3 = (1, 2, 0)^\top$, $b_1 = (-5, -9, 3)^\top$, $b_2 = (-4, -7, 2)^\top$, $b_3 = (3, 6, -2)^\top$;

1.6. $a_1 = (2, 0, -1)^\top$, $a_2 = (1, 1, 1)^\top$, $a_3 = (1, 1, -1)^\top$, $b_1 = (-14, -24, 7)^\top$, $b_2 = (3, 7, -3)^\top$, $b_3 = (-5, -9, 3)^\top$;

1.7. $a_1 = (1, 1, 1)^\top$, $a_2 = (-1, 1, 0)^\top$, $a_3 = (0, -1, 1)^\top$, $b_1 = (4, 2, 6)^\top$, $b_2 = (-4, 2, -4)^\top$, $b_3 = (-3, -2, -4)^\top$;

1.8. $a_1 = (1, 1, 1)^\top$, $a_2 = (0, 1, 0)^\top$, $a_3 = (1, 0, 2)^\top$, $b_1 = (4, 2, 6)^\top$, $b_2 = (1, 2, 2)^\top$, $b_3 = (1, 0, 2)^\top$;

1.9. $a_1 = (1, 0, 2)^\top$, $a_2 = (-1, -2, 2)^\top$, $a_3 = (1, 0, 0)^\top$, $b_1 = (1, 0, 2)^\top$, $b_2 = (-11, -4, -14)^\top$, $b_3 = (5, 0, 6)^\top$;

1.10. $a_1 = (1, -1, 1)^\top$, $a_2 = (1, 2, 0)^\top$, $a_3 = (1, 1, 1)^\top$, $b_1 = (2, -2, 2)^\top$, $b_2 = (7, 4, 10)^\top$, $b_3 = (4, 2, 6)^\top$;

1.11. $a_1 = (1, 1, -1)^\top$, $a_2 = (0, -1, 0)^\top$, $a_3 = (1, 2, 0)^\top$, $b_1 = (8, 2, 10)^\top$, $b_2 = (-1, -2, -2)^\top$, $b_3 = (7, 4, 10)^\top$;

1.12. $a_1 = (2, 0, -1)^\top$, $a_2 = (1, 1, 1)^\top$, $a_3 = (1, 1, -1)^\top$, $b_1 = (12, 0, 14)^\top$, $b_2 = (4, 2, 6)^\top$, $b_3 = (8, 2, 10)^\top$;

1.13. $a_1 = (1, 1, 1)^\top$, $a_2 = (-1, 1, 0)^\top$, $a_3 = (0, -1, 1)^\top$, $b_1 = (-5, 1, -5)^\top$, $b_2 = (2, 1, 3)^\top$, $b_3 = (6, -1, 7)^\top$;

1.14. $a_1 = (1, 1, 1)^\top$, $a_2 = (0, 1, 0)^\top$, $a_3 = (1, 0, 2)^\top$, $b_1 = (-5, 1, -5)^\top$, $b_2 = (-3, 1, -3)^\top$, $b_3 = (1, 0, 2)^\top$;

1.15. $a_1 = (1, 0, 2)^\top$, $a_2 = (-1, -2, 2)^\top$, $a_3 = (1, 0, 0)^\top$, $b_1 = (1, 0, 2)^\top$, $b_2 = (17, -2, 20)^\top$, $b_3 = (-5, 0, -6)^\top$;

1.16. $a_1 = (1, -1, 1)^\top$, $a_2 = (1, 2, 0)^\top$, $a_3 = (1, 1, 1)^\top$, $b_1 = (1, -1, 1)^\top$, $b_2 = (-11, 2, -12)^\top$, $b_3 = (-5, 1, -5)^\top$;

1.17. $a_1 = (1, 1, -1)^\top$, $a_2 = (0, -1, 0)^\top$, $a_3 = (1, 2, 0)^\top$,

$b_1 = (-11, 1, -13)^\top$, $b_2 = (3, -1, 3)^\top$, $b_3 = (-11, 2, -12)^\top$;

1.18. $a_1 = (1, 1, -1)^\top$, $a_2 = (-1, 1, 0)^\top$, $a_3 = (0, -1, 1)^\top$, $b_1 = (-11, 1, -13)^\top$, $b_2 = (2, 1, 3)^\top$, $b_3 = (6, -1, 7)^\top$;

1.19. $a_1 = (1, 1, 1)^\top$, $a_2 = (-1, 1, 0)^\top$, $a_3 = (0, -1, 1)^\top$, $b_1 = (-10, 8, -10)^\top$, $b_2 = (1, -1, 0)^\top$, $b_3 = (9, -8, 8)^\top$;

1.20. $a_1 = (1, 1, 1)^\top$, $a_2 = (0, 1, 0)^\top$, $a_3 = (1, 0, 2)^\top$, $b_1 = (-10, 8, -10)^\top$, $b_2 = (-6, 5, -6)^\top$, $b_3 = (-1, 0, -2)^\top$;

1.21. $a_1 = (1, 0, 2)^\top$, $a_2 = (-1, -2, 2)^\top$, $a_3 = (1, 0, 0)^\top$, $b_1 = (-1, 0, -2)^\top$, $b_2 = (25, -22, 22)^\top$, $b_3 = (-7, 6, -6)^\top$;

1.22. $a_1 = (1, -1, 1)^\top$, $a_2 = (1, 2, 0)^\top$, $a_3 = (1, 1, 1)^\top$, $b_1 = (2, -2, 2)^\top$, $b_2 = (-19, 16, -18)^\top$, $b_3 = (-10, 8, -10)^\top$;

1.23. $a_1 = (1, 1, -1)^\top$, $a_2 = (-1, 1, 0)^\top$, $a_3 = (0, -1, 1)^\top$, $b_1 = (-16, 14, -14)^\top$, $b_2 = (1, -1, 0)^\top$, $b_3 = (9, -8, 8)^\top$;

1.24. $a_1 = (-1, 2, 1)^\top$, $a_2 = (0, -1, 1)^\top$, $a_3 = (1, -1, 1)^\top$, $b_1 = (-2, 1, -4)^\top$, $b_2 = (9, -8, 8)^\top$, $b_3 = (2, -2, 2)^\top$;

1.25. $a_1 = (1, 1, -1)^\top$, $a_2 = (-1, 1, 0)^\top$, $a_3 = (0, -1, 1)^\top$, $b_1 = (-3, -7, 3)^\top$, $b_2 = (3, 9, -4)^\top$, $b_3 = (2, 3, -1)^\top$;

1.26. $a_1 = (1, 1, 1)^\top$, $a_2 = (0, 1, 0)^\top$, $a_3 = (1, 0, 2)^\top$, $b_1 = (5, 9, -3)^\top$, $b_2 = (2, 5, -2)^\top$, $b_3 = (7, 12, -4)^\top$;

1.27. $a_1 = (1, 0, 2)^\top$, $a_2 = (-1, -2, 2)^\top$, $a_3 = (1, 0, 0)^\top$, $b_1 = (7, 12, -4)^\top$, $b_2 = (5, 10, -4)^\top$, $b_3 = (-1, -4, 2)^\top$;

1.28. $a_1 = (1, -1, 1)^\top$, $a_2 = (1, 2, 0)^\top$, $a_3 = (1, 1, 1)^\top$, $b_1 = (1, -1, 1)^\top$, $b_2 = (3, 6, -2)^\top$, $b_3 = (5, 9, -3)^\top$;

1.29. $a_1 = (1, 1, -1)^\top$, $a_2 = (0, -1, 0)^\top$, $a_3 = (1, 2, 0)^\top$, $b_1 = (-3, -7, 3)^\top$, $b_2 = (-2, -5, 2)^\top$, $b_3 = (3, 6, -2)^\top$;

1.30. $a_1 = (2, 0, -1)^\top$, $a_2 = (1, 1, 1)^\top$, $a_3 = (1, 1, -1)^\top$, $b_1 = (-6, -16, 7)^\top$, $b_2 = (5, 9, -3)^\top$, $b_3 = (-3, -7, 3)^\top$.

В задачах 2.1–2.30 в базисе, в котором записаны уравнения подпространств, найти матрицу линейного преобразования φ трехмерного геометрического векторного пространства, указать собственные числа и собственные векторы преобразования, описать его ядро и образ, если φ есть:

2.1. проектирование на прямую $x = t$, $y = -t$, $z = 2t$ параллельно плоскости $x + y + 2z = 0$;

2.2. симметрия относительно плоскости $x - 2y + 3z = 0$ параллельно прямой $x + z = 0$, $y + z = 0$;

2.3. проектирование на плоскость $3x + y + 2z = 0$ параллельно прямой $x = z$, $x + 2y - 3z = 0$;

2.4. симметрия относительно прямой $x = 2t$, $y = t$, $z = -t$ параллельно плоскости $x - 3y - 6z = 0$;

2.5. поворот вокруг прямой $y + z = 0$, $2x + y + 2z = 0$ на угол $\pi/2$ (базис ортонормированный, два возможных решения);

2.6. проектирование на прямую $x = y$, $2x - y + z = 0$ параллельно плоскости $x - 2y + 3z = 0$;

2.7. симметрия относительно плоскости $x + 3y + 3z = 0$ параллельно прямой $y = z$, $x + y + z = 0$;

2.8. проектирование на плоскость $x - y + 2z = 0$ параллельно прямой $2x = y = z$;

2.9. симметрия относительно прямой $x + 2y = 0$, $x - y + z = 0$ параллельно плоскости $2x + y - z = 0$;

2.10. поворот вокруг прямой $x = 2t$, $y = t$, $z = -2t$ на угол $\pi/6$ (базис ортонормированный, два возможных решения);

2.11. проектирование на прямую $x = t$, $y = 2t$, $z = -2t$ параллельно плоскости $2x + y - z = 0$;

2.12. симметрия относительно плоскости $x - 2y - 2z = 0$ параллельно прямой $x = 2t$, $y = t$, $z = 3t$;

2.13. проектирование на плоскость $2x + y + z = 0$ параллельно прямой $2x - y = 0$, $x + y - z = 0$;

2.14. симметрия относительно прямой $x = t$, $y = -2t$, $z = 3t$ параллельно плоскости $2x + y - z = 0$;

2.15. поворот вокруг прямой $x + z = 0$, $x + 2y + 2z = 0$ на угол $\pi/4$ (базис ортонормированный, два возможных решения);

2.16. проектирование на прямую $x = z$, $x + 2y - 3z = 0$ параллельно плоскости $3x - y + 2z = 0$;

2.17. симметрия относительно плоскости $2x + y - z = 0$ параллельно прямой $x = 2z$, $x - y + z = 0$;

2.18. проектирование на плоскость $2x + y + z = 0$ параллельно прямой $x = t$, $y = 2t$, $z = 2t$;

2.19. симметрия относительно прямой $y - 3z = 0$, $x + y - z = 0$ параллельно плоскости $2x - y + z = 0$;

2.20. поворот вокруг прямой $x = 2t$, $y = -2t$, $z = t$ на угол $\pi/2$ (базис ортонормированный, два возможных решения);

2.21. проектирование на прямую $x = t$, $y = 2t$, $z = 3t$ параллельно плоскости $2x + 2y - z = 0$;

2.22. симметрия относительно плоскости $x - y - 2z = 0$ параллельно прямой $x = -2y = -2z$;

2.23. проектирование на плоскость $2x - y - z = 0$ параллельно прямой $2x + y = 0$, $2x + z = 0$;

2.24. симметрия относительно прямой $x = y$, $2x - y + z = 0$ параллельно плоскости $x - 2y + 3z = 0$;

2.25. поворот вокруг прямой $x + y = 0$, $x + 2y + 2z = 0$ на угол $\pi/4$ (базис ортонормированный, два возможных решения);

2.26. проектирование на прямую $x + 2y = 0$, $x - y + 3z = 0$ параллельно плоскости $x - y - 2z = 0$;

2.27. симметрия относительно плоскости $3x + y + 2z = 0$ параллельно прямой $x = z$, $x + 2y - 3z = 0$;

2.28. проектирование на плоскость $x - 2y + 3z = 0$ параллельно прямой $x = y = -z$;

2.29. симметрия относительно прямой $x = y$, $2x - y + z = 0$ параллельно плоскости $x - 2y + 3z = 0$;

2.30. поворот вокруг прямой $x = 2t$, $y = t$, $z = -2t$ на угол $\pi/3$ (базис ортонормированный, два возможных решения).

В задачах 3.1–3.10 подпространство W натянуто на систему векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе координатными столбцами. В этом базисе построить матрицу линейного преобразования, заключающегося в ортогональном проектировании на W, указать собственные числа и собственные векторы преобразования, описать его ядро и образ.

3.1. $(11, 25, -27, -9)^\top$, $(4, 8, -9, -3)^\top$;

3.2. $(11, 11, -48, 26)^\top$, $(4, 4, -15, 7)^\top$;

3.3. $(2, -16, -21, 35)^\top$, $(1, -5, -6, 10)^\top$;
3.4. $(11, 11, -34, -16)^\top$, $(4, 4, -11, -5)^\top$;
3.5. $(2, -16, -7, -7)^\top$, $(1, -5, -2, -2)^\top$;
3.6. $(1, -8, 1, -8)^\top$, $(1, -5, 1, -5)^\top$, $(1, 1, -5, -5)^\top$;
3.7. $(1, -8, 1, -8)^\top$, $(1, -5, 1, -5)^\top$, $(1, -5, -5, 1)^\top$;
3.8. $(1, 1, -8, -8)^\top$, $(1, 1, -5, -5)^\top$, $(1, -5, -5, 1)^\top$;
3.9. $(1, 8, -8, -1)^\top$, $(1, 5, -5, -1)^\top$, $(1, -1, -5, 5)^\top$;
3.10. $(1, -8, -1, 8)^\top$, $(1, -5, -1, 5)^\top$, $(4, -5, 8, -1)^\top$.

В задачах 3.11–3.30 подпространство W четырехмерного евклидова пространства задано в некотором ортонормированном базисе системой линейных уравнений. Найти в этом базисе матрицу линейного преобразования, заключающегося в ортогональном проектировании пространства на W, указать собственные числа и собственные векторы преобразования, описать его ядро и образ.

3.11. $2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0$;
3.12. $x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0$;
3.13. $x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$;
3.14. $2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$;
3.15. $\begin{cases} 2x_1 - 16x_2 - 7x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$
3.16. $\begin{cases} x_1 - 8x_2 - 8x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$
3.17. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 8x_3 + 8x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$
3.18. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 8x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 8x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 8x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - 5x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} x_1 - 8x_2 - x_3 + 8x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

3.24. $\begin{cases} 2x_1 - 23x_2 - 16x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 16x_3 - 23x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases}$

3.26. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 16x_3 - 23x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

3.27. $\begin{cases} 2x_1 - 16x_2 - 21x_3 + 35x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 10x_4 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 - 15x_3 + 7x_4 = 0; \end{cases}$

3.28. $\begin{cases} 2x_1 - 16x_2 - 7x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 - 11x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$

3.29. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 - 26x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 - 17x_4 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 - 11x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$

3.30. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 - 26x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 - 17x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

В задачах 4.1–4.15 доказать, что формула $\varphi(X) = A^\top X A$ определяет линейное преобразование пространства симметрических матриц ($X^\top = X$). В произвольно выбранном базисе этого пространства найти матрицу преобразования, определить собственные числа и собственные векторы. Установить, диагонализируемо ли преобразование.

4.1. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 4.2. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$;

4.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; 4.4. $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

4.5. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$; 4.6. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$;

4.7. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; 4.8. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

4.9. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; 4.10. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$;

4.11. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; 4.12. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;

4.13. $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; 4.14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

4.15. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

В задачах 4.16–4.30 доказать, что формула $\varphi(X) = A^\top XA$ определяет линейное преобразование пространства кососимметрических матриц ($X^\top = -X$). В произвольно выбранном базисе этого пространства найти матрицу преобразования, определить собственные числа и собственные векторы. Установить, диагонализируемо ли преобразование.

4.16. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 4.17. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

4.18. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; 4.19. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

4.20. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4.21. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

4.22. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; 4.23. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

4.24. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 4.25. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

4.26. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; 4.27. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

4.28. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 4.29. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

4.30. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Пусть фиксированные ненулевые векторы a и n трехмерного пространства неортогональны между собой. В задачах 5.1–5.12 надо доказать линейность преобразования и выяснить его геометрический смысл.

5.1. $\varphi x = (a, x)\dfrac{a}{|a|^2}$;

5.2. $\varphi x = \dfrac{(a, x)}{(a, n)}n$;

5.3. $\varphi x = x - (a, x)\dfrac{a}{|a|^2}$;

5.4. $\varphi x = x - \dfrac{(a, x)}{(a, n)}n$;

5.5. $\varphi x = x - 2(a, x)\dfrac{a}{|a|^2}$;

5.6. $\varphi x = 2(a, x)\dfrac{a}{|a|^2} - x$;

5.7. $\varphi x = x - 2\dfrac{(a, x)}{(a, n)}n$;

5.8. $\varphi x = 2\dfrac{(a, x)}{(a, n)}n - x$;

5.9. $\varphi x = (a, x)a$;

5.10. $\varphi x = (n, x)a - (a, x)n$;

5.11. $\varphi x = (a, a)x - (a, x)a$;

5.12. $\varphi x = (a, a)x - 2(a, x)a$;

5.13. $\varphi x = 2(a, x)a - (a, a)x$;

5.14. $\varphi x = [a, x] \quad (|a| = 1)$;

5.15. $\varphi x = (a, x)n - (n, x)a$.

Литература

1. Воеводин В. В. *Линейная алгебра.* — М.: Наука, 1974.

2. Беклемишев Д. В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.* — М.: Наука, 1983.

Оглавление

Линейные преобразования
Решение задач

(Методическая разработка)

Составители:
С. И. Веселов, к.ф.-м.н., доц. каф. МЛиВА,
Н. Ю. Золотых, к.ф.-м.н., ст. преп. каф. МЛиВА,
Т. Г. Смирнова, к.ф.-м.н., ст. преп. каф. МЛиВА.

Подписано в печать Формат $60 \times 84\,1/16$.
Бумага газетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2. Тираж
250 экз. Заказ Бесплатно.

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского,
603600, ННГУ, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23

Типография ННГУ, Н. Новгород, ул. Б. Покровская, 37